

AJ-1214

B.A./B.Sc. (Part–III) Term End Examination, 2021-22

MATHEMATICS (Paper-III) Optional

(Discrete Mathematics)

Time : 3 hours]

[Maximum Marks : 50

नोट- प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / Unit–I

1. (a) यदि चार पूर्ण संख्याओं को यदृच्छया गुणा कर दिया जाये, तो दिखाइये कि गुणनफल में अंतिम अंक 1, 3, 7 या 9 आने की प्रायिकता $\frac{16}{625}$ है।

If four whole numbers taken at random are multiplied together, show that the chance that the last digit in the product is 1, 3, 7 or 9 is $\frac{16}{625}$.

- (b) भाषा $L = \{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ में } a's \text{ की संख्या 3 के गुणक में है}\}$ के लिए व्याकरण की संरचना कीजिए।

Construct a grammar for the language $L = \{x \mid x \in \{a, b\}^*, \text{ the number of } a's \text{ in } x \text{ is a multiple of } 3\}$.

- (c) गणितीय आगमन के द्वारा सिद्ध कीजिए कि $n! \geq 2^n$ सभी $n \geq 4$ के लिये।

Prove that $n! \geq 2^n$ for $n \geq 4$ by mathematical induction.

इकाई–II / Unit–II

2. (a) यदि $(L, \leq)$ एक जालक है तो सिद्ध कीजिए कि असमिका

$$a \leq c \Leftrightarrow a \cup (b \cap c) \leq (a \cup b) \cap c$$

स्व-द्वैत है।

If $(L, \leq)$ is a lattice, then prove that the inequality

$$a \leq c \Leftrightarrow a \cup (b \cap c) \leq (a \cup b) \cap c$$

is self dual.

- (b) यदि G एक सम्बद्ध समतलीय आलेख है जिसमें v शीर्ष, e कोरें तथा r , G के समतलीय निरूपण में क्षेत्रों की संख्या है, तब सिद्ध कीजिए कि

$$v - e + r = 2$$

If G is a connected planar graph with v vertices and e edges and r is the number of regions in the planar representation of G , then prove that

$$v - e + r = 2$$

[P.T.O.]

- (c) यदि I शून्य रहित पूर्णाकों का समुच्चय हो तथा R संबंध इस प्रकार परिभाषित है कि $x Ry$ यदि $x^y = y^x$ जबकि $x, y \in I$ तो क्या संबंध R एक तुल्यता संबंध है?

If I is the set of non-zero integers and a relation R is defined by $x Ry$ if $x^y = y^x$, whenever $x, y \in I$. Is the relation R an equivalence relation ?

इकाई—III / Unit—III

3. (a) परिमित अवस्था यंत्र M को न्यूनतमीकृत कीजिए, जहाँ M निम्नांकित अवस्था सारणी से दिया गया है—

अवस्था	निवेश		निर्गत
	0	1	
$\Rightarrow S_0$	S_3	S_1	1
S_1	S_4	S_1	0
S_2	S_3	S_0	1
S_3	S_2	S_3	0
S_4	S_1	S_0	1

Minimize finite state machine M , where M is given by the following state table :

State	Input		Output
	0	1	
$\Rightarrow S_0$	S_3	S_1	1
S_1	S_4	S_1	0
S_2	S_3	S_0	1
S_3	S_2	S_3	0
S_4	S_1	S_0	1

- (b) सिद्ध कीजिए कि $L = \{0^i 1^i \mid i \geq 1\}$ नियमित नहीं है।

Prove that $L = \{0^i 1^i \mid i \geq 1\}$ is not regular.

अथवा / OR

- (c) संख्यात्मक फलन $a_r = 3^{r+2}, r \geq 0$ का जनक फलन प्राप्त कीजिए।

Obtain the generating function of the numeric function $a_r = 3^{r+2}, r \geq 0$.

इकाई—IV / Unit—IV

4. (a) अंतर समीकरण $a_r - 4a_{r-1} + 4a_{r-2} = 2^r$ को हल कीजिए।

Solve the following difference equation $a_r - 4a_{r-1} + 4a_{r-2} = 2^r$.

- (b) जनक फलन विधि का प्रयोग कर निम्नलिखित अंतर समीकरण हल कीजिए—

$$a_r - 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 2^r + r \quad r \geq 2$$

परिसीमा प्रतिबंध है— $a_0 = 1, a_1 = 1$

Solve by the method of generating functions the recurrence relation $a_r - 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 2^r + r$ $r \geq 2$ the boundary conditions are $a_0 = 1$ and $a_1 = 1$.

- (c) सिद्ध कीजिए कि G के अरिक्त उपसमुच्चय H के एक उपसमूह होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ जहाँ $b^{-1}, b \in H$ का प्रतिलोम है।

Prove that a necessary and sufficient condition for non empty subset H of a group G to be subgroup is that $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ where b^{-1} is the inverse of b in G .

इकाई—V / Unit—V

5. (a) निम्न बूलीय फलन का संयोजनीय प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए—

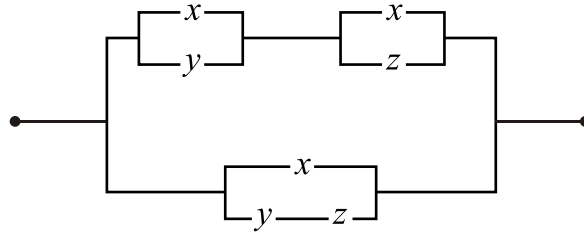
$$F(x, y, z) = x' \cdot y \cdot z + x \cdot y' \cdot z'$$

Find the conjunctive normal form of following Boolean function :

$$F(x, y, z) = x' \cdot y \cdot z + x \cdot y' \cdot z'$$

- (b) निम्न परिपथ का बूलीय फलन ज्ञात कीजिए और इन्हें सरलीकृत रूप में आलेखित कीजिए—

Find the Boolean function of following circuits and design them in simplified form :



- (c) यदि $(B, +, \cdot, ')$ बूलीय बीजगणित है तो सिद्ध कीजिए कि यदि $a + x = b + x$ और $a + x' = b + x'$ तो $a = b$

In a Boolean algebra $(B, +, \cdot, ')$, prove that if $a + x = b + x$ and $a + x' = b + x'$, then $a = b$.